LECTIO REVERENDI ET DOCTISSIMI VIRI D. *ISAACI BARROW* BEATÆ MEMORIÆ.

In qua
Theoremata Archimedis de Sphæra & Cylindro, per methodum Indivisibilium investigata, ac breviter demonstrata exhibentur.



LONDINI,
Typis *J. Redmayne*: Prostant autem apud *J. Williams* ad Insigne Coronæ in Cœmeterio D. *Pauli*, & *J. Dunmore* ad Insigne Trium Bibliorum in vico vulgò vocato *Ludgate-street*, MDCLXXVIII.

Typographus Lectori Benevolo.

CUM *in manus nostras Lectio quædam peregregia Reverendi Authoris D.* Is. Barrow *felicis memoriæ, circa Theoremata Archimedis in libris de Sphæra & Cylindro, nuper inciderit: è re esse putavimus ipsam Latinitate donatam (nam Anglico Idiomate scriptam reperimus,) in calce Operis subnectere, tanquam supplementum quoddam eorum quæ in Elementis desiderantur. Rem omnem tanto cum labore ab Archimede demonstratam, hic expeditè & perspicuè per methodum Indivisibilium confectam habes. Vale.*



In

In Libris Archimedis de Sphæra & Cylindro præcipuus Authoris scopus est resolutio horum quatuor Problematum.

1. INvenire proportionem superficiei Sphæræ ad Circulum aliquem determinatum, vel invenire circulum æqualem superficiei Sphæræ datæ.

2. Invenire proportionem superficiei cujusvis segmenti Sphæræ ad circulum aliquem determinatum, vel circulum invenire æqualem superficiei segmenti cujusvis assignati.

3. Invenire proportionem sphæræ ipsius (sive solidi contenti ejus) ad conum aut Cylindrum aliquem determinatum, vel conum aut cylindrum invenire datæ sphæræ æqualem.

4. Invenire proportionem segmenti Sphæræ ad conum aut cylindrum aliquem determinatum, vel conum aut cylindrum invenire dato segmento æqualem.

Hæcce quatuor Problemata Archimedes sigillatim prosequitur, & Theoremata sternit eorum resolutioni immediatè inservientia; sed nos eadem ad duo reducemus. Nam cum Hemisphærium sit segmentum Sphæræ, & methodus inveniendi relationes ejus quoad superficiem & solidum contentum, comprehendatur in methodo generali investigandi relationes segmentorum, atque ex superficie & solido contento Hemisphærii inventis, eorum dupla (hoc est superficies & contentum toti-

us Sphæræ) simul dentur : superfluum est & à veræ methodi legibus alienum, relationes eorum distinctè & seorsim indagare; adeo ut Archimedem ipsum ea de causa, si fas esset, redarguere possem.

Res omnis itaque ad hæc duo Problemata reducitur.

1. *Invenire proportionem superficiei segmenti cujusvis Spharici ad circulum aliquem determinatum, vel circulum invenire superficiei segmenti dati aqualem.*

2. *Invenire proportionem soliditatis segmenti cujusvis Spharici ad conum aliquem vel cylindrum datum, aut conum vel cylindrum invenire assignato Spharico segmento aqualem.*

Hæc duo Problemata methodo alia faciliori & breviori resolvam : in qua, inverso ordine, primo quæram soliditatem segmenti, & inde deducam superficiem ejus. Id quod meo judicio observatu dignum est, & quantum scio à nemine præstitum.

Imprimis itaque ad inventionem soliditatis segmenti duas præsternam suppositiones vulgariter notas & receptas : nempe

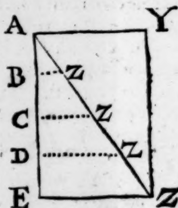
1. *Quod series magnitudinum in Arithmetica progressione à nihilo* (inclusivè) *pergentium, sive quarum excessus aquatur minima magnitudinum, subdupla sit totidem quantitatum maxima aqualium, hoc est subdupla facti ex maximo termino & multitudine terminorum.* Adeo ut si summa terminorum dicatur Z, maximus terminus D, & multitudo terminorum N; erit $Z = \frac{ND}{2}$; sive $2Z = ND$.

Hujus

o	A	2A	3A	4A
4A	3A	2A	A	o

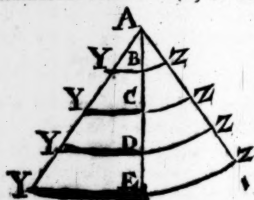
Hujus Propositionis veritas facile patebit exponendo seriem bis, sed ordine inverso. Sic enim, differentiâ terminorum semper minimum æquante, constabit singulos binos correspondentes terminos in eadem columna simul sumptos, æquales esse maximo termino, adeoque seriem bis sumptam æqualem esse maximo termino tot vicibus repetito quot sunt termini, hoc est maximo termino ducto in numerum terminorum.

Exemplum hujus utilissimæ suppositionis manifestissimum & facillimum habemus in Triangulo quod hinc probatur dimidium parallelogrammi eandem habentis altitudinem, & eidem basi insistentis. Ponamus enim trianguli A E Z altitudinem AE in partes æquales & indefinite multas parvasq; AB, BC, CD, DE divisam esse, quodque per puncta divisionum parallelæ BZ, CZ, DZ, EZ ducantur: Hæ omnes à nihilo in Arithmeticâ progressione pergunt, & proinde summa omnium, hoc est triangulum AEZ est subdupla maximæ E Z ductæ in altitudinem AE quâ summa terminorum exponitur, hoc est subdupla parallelogrammi E Y, cujus basis est E Z & altitudo A E.



Sed ad propositum magis conducet illustratio Regulæ, inferendo hinc, circulum æqualem esse dimidio radii ducti in peripheriam, hoc modo. Concipe circulum ex peripheriis

totidem concentricis constare quot sunt in Radio puncta vel æquales partes indefinitè multæ & parvæ. Hæ peripheriæ perinde ac earum radii, à centro seu nihilo in Arithmetica progressione pergent, & propterea summa earum, hoc est totus circulus æquatur dimidio maximæ (sive extimæ peripheriæ) ductæ in numerum terminorum, id est in radium. Ad



eundem modum supponere possumus sectorē AEZ ex totidem arcubus concentricis BZ CZ DZ EZ constare quot sunt puncta (sive partes æquales & indefinitè parvæ) in radio AE: quibus arcubus perindè ac radii eorum à puncto sive nihilo in Arithmetica progressione pergentibus, Sector etiam æqualis erit dimidio radii ducti in extimum arcum EZ. Id quod & hoc modo constare potest. Ponamus rectam EY radio AE perpendicularem esse, & arcui EZ æqualem. Et agatur recta AY, ut & ipsi EY parallelæ & ad AY terminatæ rectæ BY, CY, DY, punctis B, C, D ubi radius in partes dividitur insistentes. Quoniam EY, DY (:: radius AE. rad. AD) :: arcus EZ. arc. DZ, & EY æquatur EZ, erit DY = arc. DZ; & similiter erit CY = CZ, & BY = BZ. Unde triangulum AEY æquabitur sectori AEZ, hoc est $\frac{AE \times EY}{2}$ $\left(\frac{AE \times EZ}{2}\right)$ = sectori AEZ. Hoc igitur pacto insigne illud Archimedis Theorema collegimus, *Quod*

Circulum

Circulus æquatur triangulo cujus basis sit æqualis radio & altitudo æqualis peripheriæ circuli; idque sine omni figurarum inscriptione vel circumscriptione supponendo tantum aream aut superficiem circuli ex infinitè multis concentricis peripheriis constare. Quæ quidem Indivisibilium methodus (mihi jamprimum cognita) non minus evidens (vel potius evidentior) videtur, & fortè minùs fallax est, quàm illa qua supponuntur plana constare ex parallelis rectis & solida ex parallelis planis; sicut posthac patebit ubi proportiones sphæricalium & Cylindricalium superficierum inter se, à cognitis contentis solidis, & vicissim contenta solida à cognitis superficiebus, facilitate mirabili, & plenissimo cum iis quæ per puram Geometriam rigidè colliguntur concentu, ex hac methodo collegerim.

2. *Supponamus seriem esse quantitatum à nihilo (inclusivè) pergentium in proportione Arithmetica duplicata, hoc est ut* 0. 1. 4. 9. 16. &c. *quadrata nempe numerorum in simplici progressione Arithmetica* 0. 1. 2. 3. 4. &c. *Et hujus seriei triplum semper superabit maximum terminum multiplicatum per numerum terminorum; sed numero terminorum crescente proportio ad æqualitatem perpetim verget, donec tandem ad æqualitatem deveniat, cum numerus terminorum ad infinitum augetur.*

$$3\times 0+1=3. \qquad \frac{3}{2}$$
$$2\times 1=2.$$

$$3\times 0+1+4=15. \quad \frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$
$$3\times 4=12.$$

$$3\times 0+1+4+9=42. \quad \frac{42}{36}=\frac{7}{6}$$
$$4\times 9=36.$$

$$3\times 0+1+4+9+16=90. \quad \frac{90}{80}=\frac{9}{8}$$
$$5\times 16=80.$$

$$3\times 0+1+4+9+16+25=165. \quad \frac{165}{125}=\frac{11}{10}$$
$$6\times 25=125.$$

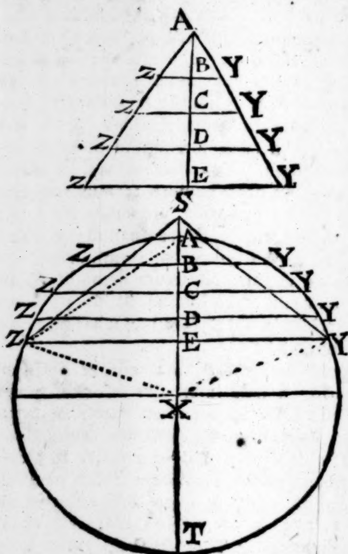
Exempli gratia, si duo sint termini, triplum terminorum erit ad maximum terminum ductum in numerum terminorum, ut 3 ad 2; si tres sint termini, ut 5 ad 4; si quatuor, ut 7 ad 6; si quinque, ut 9 ad 8; & sic perpetuo: ita ut harum proportionum antecedentia se mutuo semper superent numero binario & antecedens unumquodque suum consequens unitate. Unde constat quod quo major sit numerus terminorum, eo magis proportio ad æqualitatem accedet. Sic 100 ad 99 minus differt ab æqualitatis proportione quam 10 ad 9. Unde ponendo numerum terminorum infinitum esse (sive infinite magnum,) triplum quantitatum sic pergentium in proportione duplicata (vel ut quadrata numerorum 0. 1. 2. 3. 4. &c.) totidem quantitatibus maximo termino æqualibus æquabitur.

Hoc

Hoc ipsum, si rem spectes, ab Archimede in libro de Spiralibus tanquam multarum argumentationum in isto aliisque ejus libris fundamentum sternitur, & à *Wallisio* etiam nostro benè explicatur: nobis tamen visum est hac methodo rem declarasse & illustrasse, tanquam consideratu haud indignâ, & in hoc maximè perspicuâ & intelligibili quòd sit fractionibus libera. Et obiter etiam notandum venit quod ex dato numero terminorum hinc facilè invenire possumus proportionem triplæ seriei ad totidem terminos maximo æquales, *viz*. Ut duplus numerus terminorum uno dempto ad duplum numerum demptis duobus. Ut si numerus terminorum sit *6*, proportio triplæ seriei ad totidem terminos maximo æqualis erit ut 11 ad 10.

Regulæ hujus facillima erit & aptissima illustratio, si inde inferamus Conum subtriplum esse Cylindri æqualem basem & altitudinem habentis. Supponamus enim Coni AZY altitudinem AE in æquales & indefinite multas partes à totidem rectis parallelis ZY divisam esse, & lineæ ZY erunt ut numeri 1. 2. 3. 4. &c. & quadrata vel circuli super diametris ZY constituta, ut *1. 4. 9. 16.* &c. Et inde circuli isti omnes vel conus totus AZY (ex iisdem conflatus) subtriplus erit totidem circulorum maximo super diametro ZEY constituto æqualium, hoc est subtriplus Cylindri cujus basis est ZEY & altitudo AE.

Occur-



Occurrunt & alia duo Regulæ hujus aptissima exempla, *viz.* hinc inferendo complementum Semiparabolæ subtriplum esse parallelogrammi eandem basem & altitudinem habentis, nec non spatium à spirali & radio comprehensum subtriplum esse circuli in quo spiralis generatur. Sed hæc alterius sunt loci. Quamobrem ut in incœptis pergamus, suppositis hisce duabus Regulis, concipiamus ZAY segmentum esse sphæræ, ejus centrum X, diametrum AT, & ZAYT magnum circulum

culum per verticem tranſientem, & axis partem AE in æquales & indefinitè multas partes diviſam eſſe, & per puncta diviſionum imaginemur parallela plana duci generantia circulos in ſphæra, quorum radii ſint BZ CZ DZ & diametri ZY. Suppòno ſegmentum ſphæræ ex omnibus iſtis circulis parallelis conſtare, quorum tantus eſt numerus ac punctorum, vel partium æqualium & indefinitè multarum in axe AE juxta notam methodum indiviſibilium.

Jam vero brevitatis cauſa diameter AT dicatur d, & ſphæræ radius r (ſi opus eſt,) & axem AE quo numerus terminorum exponitur voca n & unam partium æqualium dic a. Quibus conſtitutis, ex Elementis patet eſſe $BZq = AB \times BT = a \times d - a = ad - aa$. Similiter $CZq = AC \times CT = 2a \times d - 2a = 2ad - 4aa$: Et eodem ratiocinio $DZq = AD \times DT = 3ad - 9aa$; & $EZq = AE \times ET = 4ad - 16aa$ &c. hoc eſt quadrata radiorum circulorum ZY eſſe inter ſe ut rectangula ad. 2ad. 3ad. 4ad. &c. (quæ in Arithmetica progreſſione à nihilo progrediuntur,) diminuta quadratis aa. 4aa. 9aa. 16aa, &c. (quæ progrediuntur ut quadrata numerorum 1. 2. 3. 4. &c.) Sed per primam noſtram Regulam præmiſſam rectangula omnia o.ad. 2ad. 3ad. 4ad. &c. æquantur dimidio totidem terminorum maximo $AE \times AT$ ſeu nd æqualium, hoc eſt, dimidio maximi termini ducti in numerum terminorum, id eſt, ipſi $\frac{nd \times n}{2}$

Inſuper per ſecundam noſtram Regulam quadrata omnia o aa. 4aa. 9aa. 16aa. &c. ſimul ſumpta æquantur trienti totidem terminorum maximo AEq ſeu nn æqualium, hoc eſt ipſi $nn \times n$

$\frac{nn \times n}{3}$. Quare omnia quadrata super radiis BZ, CZ, DZ, EZ descripta, conjunctim æquantur differentiæ $\frac{ndn}{2} - \frac{nnn}{3}$, vel, terminis ad eandem denominationem reductis, $\frac{3ndn - 2nnn}{6}$: & eorum quadruplum, hoc est quadrata omnia super diametris ZY descripta, æquantur $\frac{12ndn - 8nnn}{6}$ sive $\frac{6ndn - 4nnn}{3}$. Unde segmentum sphæræ æquale est Cylindro cujus basis diameter est latus quadrati æquantis $6nd - 4nn$, & altitudo est $\frac{n}{3}$; vel Cono eandem basem, altitudinem vero n habenti, seu quod perinde est, basem habenti cujus radius est $\sqrt{\frac{6nd - 4nn}{4}}$ vel $\sqrt{:\frac{3}{2}nd - nn}$, & altitudinem n ut ante. Quem Conum in Conum super eadem basi ZY cum segmento ZAY, transmutare possumus, dicendo, ut ZEq (id est $dn - nn$) ad $\frac{3}{2}nd - nn$, vel (terminis utrisque per n divisis,) ut $d - n$ ad $\frac{3}{2}d - n$, ita reciprocè n ad altitudinem Coni quæsiti: Vel in figura faciendo *ut* TE *ad* TE + XA *ita* EA *ad* ES. *Nam* ES *erit altitudo Coni* ZSY *segmentum sphæricum* ZAY *æquantis.* Quod est insigne illud Archimedis Theorema, ab eo tam prolixè tantoque cum labore demonstratum.

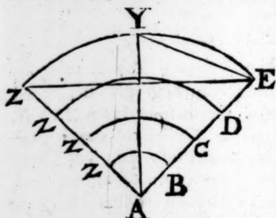
Hinc si datum segmentum Hemisphærium sit, adeoque $n = \frac{1}{2}d$ vel r, tunc d vel 2r altitudo erit coni qui basem habens æqualem basi hemisphærii (seu maximo circulo in sphæra,) æquabitur Hemisphærio. Et Conus cujus basis est dupla maximi circuli & altitudo

do 2r, vel Cylindrus cujus baſis eſt $\frac{2}{3}$ maximi circuli & altitudo 2r, æquabitur toti Sphæræ. Unde Sphæra tota eſt $\frac{2}{3}$ Cylindri cujus baſis diameter eſt 2r & altitudo etiam 2r. Atque hoc eſt præcipuum illud Archimedis Theorema, nempe *Quod Sphæra ſit ſubſeſquialtera vel $\frac{2}{3}$ Cylindri, cujus & altitudo & baſis diameter æquatur diametro ſphæræ.*

Præterea nequid omittamus quod in Authore noſtro ad rem facere videatur; Si ſummæ primò inventæ & ſegmentum referenti nempe $\frac{6ndn - 4nnn}{3}$ addamus ſummam $\frac{2ddn - 6dnn + 4nnn}{3}$ ($= \frac{4dn - 4nn}{3} \times \frac{3d - 2n}{2} = \frac{4}{3} ZEq \times XE$) Conum ZXY referentem, iſtarum ſummarum aggregatum, quod eſt $\frac{2}{3}$ ddn, referet ſectorem ſphæricum ZXYA, qui propterea æquatur Cylindro cujus baſis diameter eſt $\sqrt{dn}$ & altitudo $\frac{2}{3}$d, vel Cono cujus baſis diameter eſt $\sqrt{dn}$ & altitudo 2d, vel etiam Cono cujus baſis radius eſt $\sqrt{dn}$ & altitudo $\frac{1}{2}d = r$, (exiſtente ſcilicet reciprocè 4dn. dn :: 2d. $\frac{1}{2}$d,) hoc eſt Cono cujus baſis radius eſt linea AZ ducta à vertice ad circumferentiam baſis ſegmenti. (Nam AZq = TA × AE = dn) & altitudo r. Atque hoc eſt proximum Archimedis inſigne Theorema de ſoliditate ſectoris ſphærici, *viz. Quod Sector Sphæræ æquatur Cono cujus baſis eſt circulus radio deſcriptus lineam à vertice ad circumferentiam baſis ſegmenti ductam æquante, & cujus altitudo æquatur radio Sphæræ.*

Sic itaque ni fallor ea quæ ad ſoliditatem ſphæræ & partium ejus ſpectant, ſatis cum brevitate & perſpicuitate confecimus. Ex his jam deducemus reſolutionem alterius Proble-

blematis quod de ſuperficie ſegmenti Sphærici & inde totius Sphæræ propoſuimus. Ut hoc aſſequamur, ſicut antea ſuppoſuimus circulum ex concentricis peripheriis conſtare, & ſectorem circularem planum ex arcubus concentricis, (è quorum numero ſunt maximus & minimus ſive punctum recenſendi:) ſic jam ſupponimus ſphæras ex concentricis ſuperficiebus ſphæricis, eſt ſphæricos ſectores ſolidos ex ſimilibus ſuperficiebus concentricis (verbi gratia ſphæricum ſectorem Z A E ex ſuperficiebus BZ. CZ. DZ. EZ. &c.) conſtare.



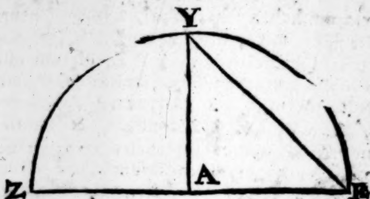
Quæ quidem ſuppoſitio tam facilis & naturalis videtur ut meo quidem judicio ſufficiat proponere, neque ad aſſenſum movendum deſideretur ulterior explicatio.

2. Sphæricas hasce ſuperficies ſupponimus eſſe in duplicata ratione radiorum ſphærarum. Hæc eſt communis affectio ſuperficierum omnium ſimilium, & optimè videtur convenire ſuperficiebus ſphæricis, quippe quæ videntur maximè uniformes & ſimilares. Potuit autem hæc ſuppoſitio eodem argumentationis genere facile convinci & ſtabiliri quo Sphæræ probantur *in Elementis* eſſe in triplicata proportione diametrorum radiorumve, vel etiam ut Corollarium Prop. 17. & 18. *Elem.* 12. ſubnecti potuit, ubi ſuperficies ſimilium Polyedrorum, in ſphæris tam ſuperficies in duplicata quàm ſoliditates in triplicata ratione diametrorum

ſphæ-

ſphærarum habentibus, inſcriptæ ſupponuntur.

Præmiſſis hiſce, ſupponamus A E, radium vel latus ſphærici ſectoris E A Z, diviſum eſſe in æquales partes indefinitè multas & exiguas, ut & ſectorem E A Z ex ſphæricis ſuperficiebus BZ, CZ, DZ, EZ conſtare, & manifeſtum erit has omnes ſuperficies in progreſſione eſſe ut quadrata radiorum, hoc eſt ut ABq. ACq. ADq. AEq. &c. vel ut quadrata numerorum 1. 2. 3. 4. &c. Unde per ſecundam noſtram regulam præmiſſam, ſumma omnium harum ſuperficierum, hoc eſt ſector A E Z, triens erit totidem ſuperficierum maximæ E Z æqualium, id eſt triens maximæ E Z ductæ in r numerum terminorum. Unde ſector æquatur Cylindro cujus baſis eſt $\frac{1}{3}$ maximæ ſeu extimæ ſuperficiei ſectoris & altitudo r, vel Cono cujus baſis æquatur ſuperficiei ſectoris & altitudo eſt r (quæ eſt ultima libri primi:) ſed modo probavimus ſectorem æqualem eſſe Cono cujus altitudo eſt r & baſis eſt circulus radio Y E à vertice ſegmenti E Y Z ad circumferentiam baſis ducto deſcriptus. Quare Conus cujus altitudo eſt r & baſis æquatur ſuperficiei ſectoris, æqualis eſt Cono ejuſdem altitudinis cujus baſis eſt circulus radio Y E deſcriptus. Atque adeo ſectoris ſuperficies E Y Z æqualis eſt circulo radio Y E deſcripto. Quod certe ex iis omnibus quæ in libris Archimedis occurrunt præcipuum eſt Theorema, nec in tota Geometria præſtantius reperitur; viz. *Quod ſuperficies cujuſvis ſphærici ſegmenti æquatur circulo cujus radius eſt recta linea à vertice ſegmenti ad circumferentiam baſis ejus ducta:* & inde, *Quod ſuperficies Hemiſphærii dupla ſit baſis, vel duobus maximis in ſphæra circulis æqua-*



æqualis. In hoc enim casu, est YEq = AZq + AYq = 2 AEq, adeoque circulus radio YE descriptus æquatur duobus circulis radio AE descriptis. Unde & superficies totius sphæræ quadrupla est circuli eundem radium habentis cum sphæra, hoc est circuli in sphæra maximi, & æqualis circulo cujus radius est diameter sphæræ. Et hinc consequitur *superficiem sphæræ æqualem esse superficiei Cylindri ejusdem altitudinis & latitudinis.* Nam Cylindri istius superficies est quadrupla baseos, ut postea videbimus. Atque hæc sunt insignia illa & celeberrima Archimedis Theoremata. Quinimò hinc omnia consectantur quæ de superficiebus sphærarum & sphæricorum segmentorum scripsit. Adeo ut ex his paucis & facillimis suppositionibus ea omnia demonstraverim quæ in his libris de sphæra & Cylindro notæ alicujus esse videantur.

Adjiciam tantum quod postquam per methodum Archimedis (nam vix alia quævis, ut opinor, præter nostram ab inventa soliditate, excogitari potest) superficies segmentorum inventæ sunt æquales circulis radiis YE descriptis: hinc liquido consequetur superficies sphærarum & inde sectorum similium esse in duplicata proportione radiorum sphærarum:

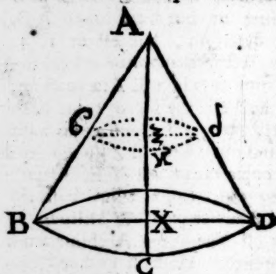
atque

ē
E
e
ā
t
ī
or
is
ia
&
e-
s,
il-
o-
E
fi-
ſſe
m:
ue

atque adeo à superficiebus sic inventis, contenta segmentorum & integrarum sphærarum vicissim deduci possunt, idque luculenter & expeditè in hunc modum. Quoniam in sectore E A Z superficies B Z. C Z. D Z. E Z in progressione sunt ut quadrata super A B. AC. A D. A E descripta, hoc est ut 1. 4. 9. 16. &c. totus sector æquabitur trienti totidem superficierum maximæ E Z æqualium, vel $\frac{1}{3}$ E Z x r, hoc est Cylindro cujus basis est $\frac{1}{3}$ E Z & altitudo r, vel Cono cujus basis est E Z & altitudo r. Sed E Z supponitur æqualis circulo cujus radius est Y E. Quare sector E A Z æquatur Cono cujus basis est circulus radio Y Z descriptus, & altitudo r: quod universale est Theorema Archimedeum de sectorum contentis. Unde si ex hoc Cono subducatur Conus Z A E verticem habens ad sphæræ centrum A & basi segmenti E Y Z ex adverso insistens, habebis segmentum istud E Y Z. Ubi verò sector E Y Z Hemisphærium est, nullus erit ejusmodi Conus subducendus, & propterea Cylindrus cujus basis est $\frac{2}{3}$ E Z & altitudo r, vel Conus cujus basis est 2 E Z & altitudo itidem r, æquabitur toti sphæræ. Sed Hemisphærii superficies E Z probatur æqualis duobus circulis in sphæra maximis: unde sphæra tota datur. Atque hoc primum est & præcipuum Archimedis Theorema de contento Sphæræ: à quo facilè deducitur sphæram esse $\frac{2}{3}$ Cylindri circumscripti, hoc est Cylindri cujus altitudo & baseos diameter sit æqualis diametro sphæræ.

Authoris nostri (Archimedis) doctrina contra novam & celeberrimam methodum Indivisibilium facere videtur eamque subvertere, & à Tacqueto verbi gratia (Prop. 2. lib.

lib 2 Cylindr.) in hunc finem urgetur. Methodi enim istius usitatus processus dimensionem Conicæ superficiei (ut & sphæricæ aliarumque curvarum) satis diversam ab ea quam Author noster aliique demonstrarunt, exhibere videtur. Instantiæ gratia ponamus conum rectum ABCD, ejus axem AX, & basem BCD, & planum $\beta\kappa\delta$ ad arbitrium ducatur parallelum basi BCD. Et cùm



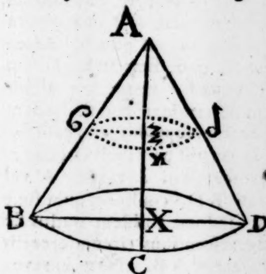
sit diam. BD. periph. BCD :: diam. $\beta\delta$. periph. $\beta\kappa\delta$, & sic ubique, erit (juxta methodum Indivisibilium & per 12. V.) ut diameter BD ad peripheriam BCD, ita triangulum ABD ex parallelis istis diametris constans, ad Conicam superficiem ABCD ex peripheriis istis constantem. Hoc est diam. BD. periph. BCD :: $\frac{AX \times BD}{2}$. $\frac{AX \times \text{periph.} BCD}{2}$.

Unde $\frac{AX \times \text{periph. } BCD}{2}$ æquabitur conicæ superficiei: quod falsum est & modò demonstratis contrarium. Demonstravimus enim superficiem Conicam esse $\frac{AB \times \text{periph. } BCD}{2}$.

Huic Objectioni respondendo dicimus methodum Indivisibilium alio modo procedere in speculatione perimetrorum & curvarum superficierum quam in speculatione planarum superficierum & solidorum contentorum. Supponit

-
u-
u-
n
l-
r.
a-
us
m
us
&
D,
ʃ
m
l-
aſi
m
ʃ.
e-
i-
i-
is
D
n.
D.
-
u-
a-
u-
-
e-
re
u-
u-
p-
nit

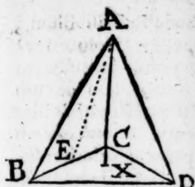
ponit equidem planarum figurarum areas ex parallelis rectis quodammodo conſtare & ſolidorum contenta ex parallelis planis, eorumque numerum per altitudinem figurarum exponi: ſed nequaquam ſupponit perimetros planarum figurarum ex punctis, aut ſuperficies ſolidorum ex lineis conſtare, quorum numerus per altitudinem figuræ exponi poſſit.



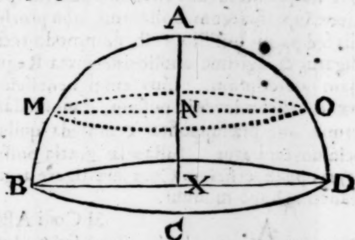
Verbi gratia, etſi triangulũ ABD ex lineis ipſi BD parallelis conſtet quarum numerus per numerum punctorum in perpendiculo AX hoc eſt per longitudinem iſtius perpendiculi exponitur; tamen abſurdiſſimũ eſſet ſupponere lineam AB ex punctis conſtare quorum numerus per numerum punctorum in breviori linea AX exponi poſſit. Nam licet rectæ $G\xi$, per ſingulas ipſius AX partes infinitè parvas ductæ, dividant AB in totidem partes infinite parvas, tamen hæ partes non ſunt ejuſdem denominationis ſeu quantitatis cum partibus ipſius AX ſed ipſis paulo majores, adeo ut ſi partes ipſius AX pro punctis habeantur, partes ipſius AB non ſimul dicendæ erunt puncta ſed punctis majores; & vice verſa ſi partes ipſius AB dicantur puncta, partes ipſius AX habendæ ſunt punctis minores, ſi ita loqui fas ſit. Puncta enim de quibus agitur in methodo Indiviſibilium non ſunt abſolutè puncta ſed partes indefinitè

Parvæ, quæ nomen punctorum per affinitatem usurpant. Cùm igitur puncta non recipiant majus & minus, nomen punctorum non simul tribuendum erit partibus diversæ magnitudinis; & proinde quamvis numerus majorum partium ipsius A B exponi posset per numerum minorum partium ipsius A X, tamen numerus punctorum in A B per numerum punctorum in A X (hoc est per numerum partium in A X æqualium partibus ipsius A B quæ puncta dicuntur) nullo modo exponi potest. Linea A B tot habet puncta quot sunt in seipsa sola vel alia linea sibi æquali, neque per aliam quamvis mensuram determinari potest. Eodem modo hæc methodus non supponit conicam superficiem A B C D ex tot parallelis circumferentiis perpetim crescentibus à vertice A vel decrescentibus à basi B D, constare, quot sunt puncta in Axe AX, sed ex totidem potius sic crescentibus vel decrescentibus circumferentiis quot sunt puncta in latere A B. Nam in revolutione lineæ A B circa axem A X (qua conica superficies generatur) unumquodque punctum in linea A B circumferentiam producit & per consequentiam plures circumferentiæ producuntur quam axis A continet puncta. Quamobrem si methodum Indivisibilium ad superficies solidorum extendere velis & supponere superficies istas ex parallelis lineis constare, has non per parallelas areas solidum constituentes, hoc est non per altitudinem solidi areas istas numerare, sed per alias lineas conditioni figuræ cujusque congruas computare debes. Quæ quidem lineæ in figuris non irregulari-

bus



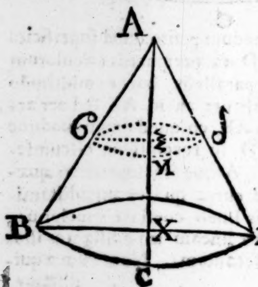
bus facilè determinari solent. Verbi gratia, in æquilatera Pyramide ABCD, cujus axis est AX, posito quod lateralis superficies Pyramidis ex perimetris triangulorum basi BCD parallelorum constet, hæ neque per altitudinem AX, neque per latus AB computandæ erunt, (nam exitus priori modo deficeret à vera dimensione, posteriori superaret eam,) sed per lineam AE perpendiculariter ductam à vertice A ad basis latus BC; cujus rei ratio est quod unumquodque Pyramidis latus planum, ut ABC, ex parallelis rectis constat computatis per



AE. Ad eundem modum posito quod superficies Hemisphærii BAD ex peripheriis circulorum constet basi BCD parallelis, harum multitudo non computanda erit per axem AX sed per arcum quadrantalem AB, eo quod unumquodque punctum arcûs AD in revolutione circumferentiam producit. Atque ita superficies quælibet sive plana sive curva quæ ex æquidistantibus rectis vel curvis lineis constare concipitur, computanda erit per lineam æquidistantes istas perpendiculariter secantem.. Nam cum æquidistante

distantes istæ, in hac methodo Indivisibilium; non ut lineæ latitudinis expertes absolute spectentur sed ut lineæ considerentur latitudinem infinite parvam habentes quæ eadem sit cum latitudine vel crassitie puncti æquidistantes istas in circumvolutione describentis, & cum eædem æquidistantes lineam ipsas perpendiculariter secantem in partes distribuant latitudinem suam mensurantes, partes istæ pro ejusmodi punctis habendæ erunt, adeoque numerus æquidistantium vel summa latitudinum earum per numerum punctorum in ista secante, hoc est per longitudinem secantis æstimari debet, & non per lineam alterius cujusvis longitudinis, siquidem ea ex punctis pluribus vel paucioribus constabit.

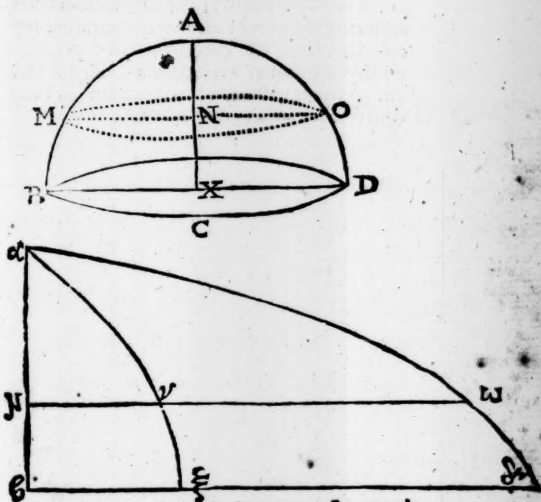
Hinc itaque methodus Indivisibilium, in speculatione superficierum Solidorum non prorsus inutilis sed potius utilissima est, dummodo rectè intelligatur & legitime applicetur juxta Regulam jam præscriptam. Ejus enim beneficio, vel hæ superficies inveniri possunt, si modò data habeamus aut præsupposita commoda quibus ratiocinium innitatur. Instantiæ gratia possumus ejus ope superficiem Coni investigare argumentando in hunc modum.



Si Coni ABD superficies dividatur in circulorum innumeras peripherias $\beta\chi\delta$ basi BCD parallelas, istarum peripheriarum latitudines omnes simul sumptæ conficiunt latus AB easdem perpen-



pendiculariter secans, adeoque tot erunt peripheriæ quot puncta in linea A B, hoc est numerus earum per numerum punctorum in A B sive per longitudinem ejus exponi potest. Quare si ad singula puncta ipsius A B erigantur perpendicula peripheriis æqualia, ex perpendiculis istis conflabitur superficies æqualis superficiei Coni. Sed ista superficies triangulum erit cujus altitudo est A B & basis æqualis maximæ peripheriæ B D C, atque adeo superficies coni exhibebit $= \frac{1}{2}$ AB $\times$ periph. B D C. Quæ quidem conclusio cum iis consentit quæ ab Archimede ponuntur ac demonstrantur.



Ad eundem modum si sumatur recta quævis

α C,

$\alpha\zeta$, arcui quadrantali Hemisphærii AB æqualis, & ad ejus puncta singula μ, erigantur perpendicula $\mu\nu$, parallelorum circulorum MOM per arcus istius quadrantalis correspondentia puncta M transeuntium radiis MN æqualia, quorum maximum sit $\beta\xi$, radio basis Hemisphærii BX æquale: figura $\alpha\beta\xi$ continebit radios omnium circulorum ex quorum peripheriis superficies hemisphærii constat. Et si ipsis peripheriis MOM, BDB, æqualia erigantur perpendicula $\mu\omega$, $\zeta\delta$, conflabitur figura $\alpha\beta\delta$ æqualis superficiei hemisphærii. Cujus figuræ dimensionem siquo pacto poteris invenire, (ut in hoc casu aream figuræ $\alpha\zeta\xi$ invenire conceditur,) inde facile deduces contentum segmenti sphærici, illi congruum quod per aliud quodvis legitimum ratiocinium colligere licebit. Quam quidem observationem in Geometria non inutilem fore existimo.

F I N I S.